

Milí přátelé,

držíte v rukou poslední sérii Pikomatu v letošním školním roce. V této sérii najdete zadání poslední, čtvrté, série, vzorové řešení série druhé a hlavně pozvánku na tábor. Ten se bude letos konat u obce Dzbel na rozhraní Jihomoravského a Olomouckého kraje od 14. do 28. srpna. Podrobnější informace o táboře naleznete na poslední straně a na přiloženém letáčku. Toto ale není poslední dopis od nás. Můžete se těšit na ještě jeden se vzorovým řešením třetí a čtvrté série, se kterým Vám přijdou i Vaše opravená řešení. Užívejte si jara a přihlašujte se na tábor, kam můžete pozvat i své kamarády, kteří mají zájem o matematiku.

Pikomata je určen žákům 6. – 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií, řešit jej však mohou i mladší řešitelé. Je pořádán občanským sdružením SVČ Lužánky pod záštitou Gymnázia na třídě Kpt. Jaroše.

Pikomata je korespondenční soutěž rozdělená do 4 sérií. Každá ze sérií obsahuje 7 příkladů zasazených do příběhu. Pokud některé z úloh vyřešíte, řešení nám pošlete, my je opravíme a spolu s výsledky a zadáním nové série pošleme zpět. Všechny informace o formě řešení najdete v Jedenáctéru řešitele Pikomatu. Nebojte se poslat řešení byť jen jediné úlohy, ceníme si každého řešitele bez výjimky.

Pikomata pro vás ovšem nemusí zůstat jen soutěží na papíře. Každoročně pořádáme několik soustředění a letní tábor, kam jsou zváni všichni naši řešitelé. Více informací naleznete během roku na zadních stránkách semináře.

Jedenáctero účastníka

1. Opravující nejsou neomylní. Občas se mohou splést, takže se po důkladném přečtení vzorového řešení a poznámek od opravujícího neboj ozvat s žádostí o vysvětlení.
2. Piš čitelně. Co opravující nepřečte, nemůže hodnotit.
3. Neopisuj zadání. Ani ho nenalepuj. Víme, co jsme zadávali.
4. Piš na papíry formátu A5 nebo A4. Každý příklad piš na samostatný papír (můžeš z obou stran), protože různé příklady budou opravovat různí lidé. Na horní okraj každého papíru napiš předepsanou hlavičku: uprostřed číslo příkladu, vpravo tvoje jméno, třídu a školu. Pokud se ti řešení nevejde na jeden papír, napiš doleva nahoru i číslo stránky a počet listů, na kterých jsi příklad řešil. Nic víc do hlavičky nepatří.
5. Řeš to, co je zadané. Pořádně si zadání přečti a neupravuj si ho. Pokud si myslíš, že příklad nelze vyřešit, napiš proč.
6. Komentuj postup řešení. To znamená, že je třeba napsat nejenom výsledek, ale i početní a myšlenkový postup při řešení příkladu. Bez toho nemůžeš získat plný počet bodů. Řešení na počítači (a výpis programu jako důkaz správnosti) nejsou uznávána. Navíc, u geometrických úloh nestačí si jen situaci narýsovat a hledané vzdálenosti nebo úhly prostě změřit - nikdy přece nemůžeš mít jistotu, že tvůj obrázek je přesný.
7. Odesílej řešení včas. Na obálce musí být poštovní razítko nejpozději ze dne následujícího po termínu odeslání. Jinak riskuješ ztrátu bodů.
8. S vyřešenými příklady vždy posílej i prázdnou nadepsanou obálku (tzn. Je na ní napsána tvoje adresa) se známkou, aby bylo v čem poslat zpátky opravené příklady, vzorová řešení a zadání další série. Obálku řádně ofrankuj.
9. Řešení můžeš poslat také přes internet pomocí našeho PIKOPORTu, informace, jak na to, naleznesh na našich webových stránkách.
10. Pokud se při řešení dostaneš do obtížné situace nebo narazíš na těžší úlohu, nevzdávej to. Na řešení máš zpravidla několik týdnů, můžeš hledat podobné úlohy, problémy či teorie, které s nimi souvisí, avšak řeš samostatně. Soutěž je o tom, co dokážeš ty, ne tví kamarádi.
11. Účastní se soustředění, setkání a tábora (tento bod je v podstatě jen do počtu - jedenáctka je takové hezké prvočíslo).

System hodnocení

V každé sérii je celkem sedm příkladů, přičemž 5. a 6. příklad je rozdělen na 5a a 5b (respektive 6a a 6b). Řešitelům z osmých a devátých tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií jsou určeny právě příklady 5b a 6b (za vyřešení příkladů 5a a 6a nezískají žádné body). Mladším řešitelům se počítá lepší z příkladů 5a, 5b (respektive 6a, 6b). Každý příklad se hodnotí zvlášť (1. – 6. příklad 5 bodů a 7. příklad 7 bodů), takže můžeš poslat i méně příkladů. Kolik nám pošleš příkladů, tolik ti jich opravíme. Pamatuj, lepší je kvalita než kvantita. Navíc u všech úloh platí, že pokud se ti podaří opravdu elegantní řešení, tak můžeš získat i nějaký ten bodík navíc... S každým vzorovým řešením (tedy od 2. série) ti dojde výsledková listina za předchozí kola, takže můžeš pořád sledovat, jak se ti daří oproti ostatním řešitelům. S případnými dotazy se seminářem se můžeš obracet na:

E-mail : info@pikomat.net
Telefon : 605 057 757 - Dominik Tělupil
549 524 124 - Zdeňka Antonovičová
Adresa : Pikomat, CVČ Lužánky, Lidická 50, 602 00, Brno
Internet : <http://www.pikomat.net>

Zadání 4. série

Místnost se každou chvílí znovu otřásla, xandijští velitelé a důstojník Novotný však stáli kolem kulatého stolu jako zkamenělí. Všichni zamýšleně sledovali interaktivní trojrozměrný plán lodi vznášející se nad stolem. Sem tam některý z Xandianů něco pozměnil, případně na něco ukázal a krátce svůj poznatek okomentoval, ale přesto bylo vidět, že si neovědí rady. Z bezvýchoďného přemýšlení je vytrhlo náhlé zmizení plánu. Místo něj se nad stolem zjevil poněkud potrhaný obraz komunikačního důstojníka republikové flotily. Byl až příliš zrnitý a často vypadal, ale Novotný snadno poznal, že důstojník něco říká. Nebylo však slyšet co.

„K čertu, nefunguje zvuk!“ zaklel jeden z Xandianů, otočil se k technikovi, který právě do něčeho zběsile mlátil šroubovákem, a zakřičel na něj něco v xandijštině. Novotný neovládal xandijštinu, ale za několik let ve válce se naučil rozpoznávat některá slova. Teď zaslechl něco o zvuku a komunikaci. Xandijský technik rozčileně odpověděl a na závěr do rozbité komunikační jednotky kopl.

Zareagovalo několik dalších Xandianů a celou východní část hangáru tak naplnilo nesrozumitelné hlučení a nadávky. Netrvalo však dlouho a výměna názorů byla přerušena příchozí dvojicí xandijských vojáků vedoucích člověka. Novotný v něm okamžitě poznal Tolinského. Tolinski se opíral o Xandiana po jeho pravici, zřejmě byl postřelen do stehna a nemohl na nohu došlápnout. Novotný hned zareagoval a promluvil na Xandiana, který se předtím rozkřikl na technika.

„To je desátník Tolinski, je náš technik. Nechte ho, ať se podívá na tu komunikační jednotku, je to expert.“

„No dobrá,“ odpověděl Xandian a obrátil se k Tolinskému. „Támhle vzadu je improvizovaná radiokomunikace. Není napojena na systémy lodi. Na chvíli se nám už podařilo navázat vizuální kontakt, ale máme potíže s audiem. Náš technik ti řekne, v čem je problém.“

Tolinski se s pomocí xandijského vojáka dopotácel až ke komunikační jednotce. Rozčilený technik na něj zamával obdélníkovou destičkou:

„Nemůžu tyhle krámy nastrkat tady do pole. Bez toho mi to prostě nepojede. Ani nevím, jestli to vůbec jde.“

27-IV-1

Je dáno čtvercové pole 8 krát 8 políček bez dvou protějších rohů (celkem tedy 62 políček). Je možné umístit do pole obdélníky o velikosti 1 krát 2 políčka tak, aby se nepřekrývaly, nepřesahovaly přes okraje pole a zároveň bylo každé políčko zaplněné? Svě tvrzení dokažte.

Tolinski se ani nepokoušel nějak tam tvary naskládat a rovnou je rozlámal na čtverečky. Xandian vytřeštil oči.

„Co to vyvádíš? To jsou naše poslední!“

„Tohle je komunikační disk I-48, vychází ze vzoru staré pětadvacitky určené jen pro audiokomunikaci. Tahle ta část,“ ukázal na levou polovinu obdélníkové desky, „je ti k ničemu,

když chceš pouze audio. Předpokládám, že video přenášíte přes TR-5.“

„Ne, ty jsme nesehnali, ale máme TR-4.“

„To je jedno, ty jsou skoro stejné,“ zabručel nezaujatě Tolinski, zatímco skládal nalámané I-48 do komunikační jednotky.

„Tak, zkus to spustit, doufám, že to pojede.“

Xandian něco stiskl na ovládacím panelu a celá komunikační jednotka se rozsvítila, disky zběsile chrčely, kontrolky blikaly. Xandian však stále vypadal nespokojeně.

„Ptá se mě to na frekvenci přenosu. Tu můžu spočítat, ale potřebuju vědět, které spínače jsou vypnuté. Počítač je spíná jednoduchým systémem. . . “

27-IV-2

Uvnitř procesoru je řada sta spínačů. Na začátku jsou všechny vypnuté. Počítač nejprve přepne každý druhý, poté přepne každý třetí, pak každý čtvrtý, pátý, . . . , stý. Kolik spínačů je vypnutých a které to jsou?

Xandian zadal vypočtenou frekvenci a ze stroje se znovu ozvalo hlasité chroustání disků. Na vteřinu to už vypadalo, že přístroj nebude fungovat, nakonec se však nad velitelským stolem znovu objevil komunikační důstojník. Právě mluvil s některým ze svých nadřízených, nebylo však vidět s kým. Krátce po navázání spojení však rozhovor ukončil a začal hovořit ke Xandianům.

„Uveďte svou identifikaci, není spuštěn vizuální přenos z vaší strany.“

Jeden z Xandianů se ujal slova:

„První poručík Ast-Ore, nejspíš současný kapitán xandijské vlaškové lodi. Naše loď již není v našich rukách. Veškeré systémy lodi má plně v moci lodní počítač. Zbylo nás tu asi sedmdesát, našli jsme dva členy vaší armády.“

„Dva, říkáte? A koho? Ať se ohlásí!“

Novotný přistoupil ke komunikátoru:

„Důstojník Novotný se hlásí. Též hlásím desátníka Tolinského. Je raněný, nemůže na nohu.“

„Dobře, spojím vás nyní s admirálem, dá vám další rozkazy.“

Obraz komunikačního důstojníka ještě chvíli tiše stál nad stolem, bylo vidět, jak se důstojník pro něco natahuje. Pak obraz zmizel a na jeho místo nastoupila jiná postava. Admirál Ak'atal.

„Není čas na dlouhé vybarování. Váš úkol je jasný. Levým východem z hangáru se dostanete do uzlové místnosti. Je to obyčejná prázdná místnost, ale u jedné zdi bude svazek kabelů. Vedou od hlavního počítače k jednomu z turboblasterů. Ty kabely musí být přetřhány. A ještě něco. Podařilo se nám nasadit tam štěnice a zjistit kolik nepřátel tam na vás čeká. Vysílání však nepronikne pláštěm lodi. Vy byste ho ale mohli zachytit.“

„Rozumím pane, tohle se snad už podaří.“

„Závisí na tom život nás obou, na to nezapomeňte.“

Když zmizel admirálův obraz, promluvil Xandian po Novotného pravici. Byl to ten, který předtím Novotnému zachránil život.

„Zdá se, že máme práci. Jdu do toho s vámi.“

Přerušil ho komunikační technik:

„Mám jen velmi strohé informace, loď musela vysílání odchytil a zablokovala většinu zpráv od štěnic. Tohle jediné prošlo. Doufám, že to bude stačit.“

27-IV-3

Počet bitevních droidů je m , počet androidů n . Kolik mohlo být droidů a kolik androidů, víte-li, že platí $3m + n = mn$? Najděte všechna řešení.

Novotný nechal Xandiany, ať rozluští zprávu, a rozhlédl se po hangáru. Nejbliže ke stolu byla komunikační jednotka. Tolinski tam něco ukazoval Xandianovi a ten z toho byl vyloženě nadšený. Za nimi byl veterán čistící útočnou pušku, zrovna kolem něj procházela hlídka. Veterán na chvíli zvedl hlavou a něco pronesl k hlídačce. Novotný nerozuměl, co veterán chtěl, ale druhý Xandian mu po chvíli váhání podal dvojici pilulek, které vytáhl z levé náprsní kapsy. Nebo by tam někde aspoň byla náprsní kapsa u člověka, Xandiané byli jistý druh hmyzu, a proto neměli prsní svaly. Co však v hangáru zaujalo Novotného nejvíce, byla dvojice Xandianů u zdi. Nevypadali na vojáky. Zřejmě to byli civilisté, asi vědci pracující na této lodi. Mluvili na hlas a kupodivu obecnou řečí, takže jim Novotný zřetelně rozuměl.

27-IV-4

„Máš tři přirozená čísla, jejich součin je 36. Urči je.“

„To mi nestačí.“

„Jejich součet je první část většího data.“

„Stejně mi to pořád nestačí.“

„A co kdybych ti řekl, že největší z nich je druhá část většího data?“

„Aha! Už vím.“

Určete tato tři přirozená čísla.

Novotný už neslyšel, jaké to číslo bylo, protože ho vyrušil jeden z xandijských důstojníků.

„Důstojníku, máme připraveny nálože, ale je tu jistý... ehm... problém.“

„Jaký problém?“

„Víte, ty kabely nevedou přímo skrze místnost.“

„Cože?!“

„Tak to bylo na původních plánech lodi, ale při konstrukci této lodi se to měnilo.“

„Tak kde jsou? Musíme si pospíšet!“

„Jsou asi třicet metrů pod uzlovou místností. Vede tam úzká šachta. Xandian – nebo člověk – se tam neveze, ale granát by mohl.“

„A v čem je problém?“

„Ta šachta se rozděluje. V každém patře. Pater je celkem sedm.“

„A sakra. A jak podle vás zajistíme, že ten granát najde cíl?“

„To není ten problém, všechny cesty mají stejné vyústění, ale musíme znát podrobně všechny cesty, abychom mohli nastavit časovač.“

27-IV-5a

Kolik existuje různých cest v následující struktuře (tučným písmem je uveden příklad cesty), pokud je možno v dalším patře přejít pouze na sousední pozice (dolů, dolů-vpravo, dolů-vlevo). Z pozice 5i se tedy lze dostat pouze na pozice 6i, 6j a 6k.

1a
2a **2b** 2c
3a 3b 3c **3d** 3e
4a 4b 4c 4d 4e **4f** 4g
5a 5b 5c 5d 5e **5f** 5g 5h 5i
6a 6b 6c 6d 6e 6f **6g** 6h 6i 6j 6k
7a 7b 7c 7d 7e 7f 7g 7h **7i** 7j 7k 7l 7m

„To by neměl být takový problém, ne?“

„To není všechno. Na konci je vyústění do mezi-patrové servisní místnosti. Mají tam přístup jen servisní roboti, ty momentálně však neovládáme.“

„Máme něco, co náš dáreček doručí až k cíli?“

„Zprovoznili jsme starého experimentálního robota, ale není správně nakonfigurován a půjde k cíli vlastní cestou. Nejspíš ji vybere náhodně. Znovu opakuji. Musíme znát důkladně všechny cesty, abychom mohli nastavit časovač. Kvůli nosníkům se našťěstí robot nebude pohybovat úplně chaoticky.“

27-IV-5b

Mějme obdélníkovou místnost $ABCD$ o stranách délky $|AB| = |CD| = 179 \text{ ft}$ a $|BC| = |DA| = 154 \text{ ft}$ (Xandiané nepoužívají metrický systém). Kolika různými cestami se robot může dostat z bodu A do bodu C za předpokladu, že se dokáže pohybovat pouze dvěma způsoby:

- o 5 ft směrem kolmým ke stěně CB a potom o 7 ft směrem kolmým ke stěně CD
- o 7 ft směrem kolmým ke stěně CB a potom o 4 ft směrem kolmým ke stěně AB

Poznámka: $1 \text{ ft} = 1 \text{ stopa} \doteq 30,5 \text{ cm}$.

„Proboha, to bude operace,“ pomyslel si nahlas Novotný.

„Doufejme, že nám váš bůh pomůže.“

Asi o minutu později Novotný a Tolinski stáli připraveni na konci haly, stejně jako Dest-Prot, Xandian, který Novotného zachránil, a Ast-Ore, který se nabídl, že půjde s nimi. Novotný kývol na ostatní a všichni čtyři vyrazili směrem k uzlové místnosti, kde na ně měla čekat skupina bitevních droidů a několik androidů. Na první zádrhel narazili už několik metrů před místností. Dveře byly zablokované, daly se otevřít elektronickým panelem, ale nikdo ani nepomyslel na to, zkusit to. Ta horší, za to ale mnohem bezpečnější cesta vedla přes manuální prolomení zámku. To vyžadovalo opatrné a přesné zacházení, protože většina zámků tohoto typu obsahovala zabezpečovací mechanismus a dveře by mohly být v lepším případě zapečetěny nadobro. V horším případě by všichni čtyři vyletěli do povětří, aniž by dveře nějak poškodili. Odemykání se ujal Tolinski.

„Vypadá to na klasický trojzámek, můžu ho odříznout, ale je na něj těsně naražený bezpečnostní systém. Ten je i uvnitř, musím vědět, jak je to velký.“

„Tak to změř,“ napadlo Novotného „Kolik to může mít? Čtyři celá dva? Čtyři celá tři?“

„Potřebuju to přesně, dej mi svůj papír.“

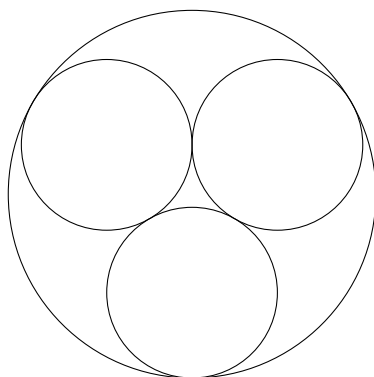
„Tak se na to podívej, má to-“

„Přesně, sakra, říkám!“ rozkřikl se Tolinski. „Ten papír.“

Novotný neochotně podal Tolinskému svůj elektronický papír a ten okamžitě začal počítat průměr.

27-IV-6a

Jaký je průměr velké kružnice, jestliže jsou tři malé kružnice shodné s poloměrem 1 cm a každá kružnice se dotýká zbývajících tří?



Tolinski nastavil svůj elektrický paklíč a přiložil ho k zámku. Na chvíli se každému, včetně obou Xandianů, zatajil dech. Všichni čekali, mohla to být jejich poslední chvíle života, vše záviselo na tom, jak nervózní Tolinski je a jak důkladná byla loď a její konstruktéři při

vytváření této pasti. Nakonec však dveře pouze cvakly a uvolnily cestu. Cestu kulkám. Salva se vyřítila ihned poté, co se dveře pohnuly, a do toho všeho něco vyrazilo dveře zevnitř, takže se rozletěly dokořán a Tolinského přitlačily ke zdi. Zbývající tři palbu zuřivě opětovali a o několik vteřin později se k nim přidal i Tolinski. Obě strany byly na nepřitele náležitě připraveny, roboti však měli nevýhodu. Stále byli pouze stroje. A co víc, byli novou generací, prototypy nové inteligence, a měli mnoho vad a nedokonalý bojový systém. Pro skvadru ostřílených válečníků to nebyl žádný protivník. Brzy již byla uzlová místnost prázdná.

Xandiané nemají příliš dobrou mimiku. Vlastně kromě tří kostěných destiček, páru tykadél a spodní čelisti nemohou na hlavě hýbat snad ničím. Přesto bylo vidět na Ast-Ore, že má z něčeho obrovskou a náhlou starost. Novotný to nevydržel:

„Co se děje?“

„Máme vše propočítáno, nastaveno, zbývá to tam jen hodit a čekat. Ale nezjistili jsme, jestli se do robota ten granát vůbec vleze.“

27-IV-6b

Úložný prostor robota má tvar kvádra o hranách 24 cm, 20 cm, 16 cm. Granát má tvar obdélníku o rozměrech 5 cm, 37 cm. Dokažte, že se granát vejde do úložného prostoru.

„A je tam!“ neudržel se Novotný, když granát konečně nasoukal do robota. Pak už jen zapnul spínač a robota poslal ostríc neznámé šachtě.

Skupina se urychleně vracela zpět k hangáru, po cestě však nemohli přeslechnout hlasitou ránu oznamující výbuch granátu. Náhle ticho od míst, kde se nacházely turboblastery, značilo, že elitní tým republikové armády má za sebou první úspěšný úkol na téhle misi. Novotnému přidalo na radosti ještě více, když zjistil, že se mezitím do hangáru dostal Anđelko. Byl postřelen, dostal dvě rány do levého boku, ale zdálo se, že se mu dostalo dobrého ošetření a bude v pořádku.

Zatímco Novotný se bavil s Anđelkem a Tolinským, Ast-Ore vyřizoval nové spojení s republikou.

„Poručíku, musíte otevřít vnější vrata hangáru,“ rozkázal doposud neznámý republikový důstojník.

„Žádný problém, pane, hangár má nouzový uzávěr, který není přímo napojen na počítače lodi. Měl by fungovat.“

„Dobře. Za chvíli jsme tam pro vás. Chci, aby byli Vaši muži připraveni, nemůžeme tam trčet moc dlouho. Kapitán Schödelbauer, konec.“

Xandian se obrátil k ostatním v hangáru, všude byl všeobecný zmatek a tak, když promluvil, zvýšil trochu hlas.

„Balíme to tu. Za chvíli je tu pro nás republika, takže si sbalte, co považujete za nutné a opouštěme tenhle pekelný stroj!“

Z haly se ozvalo všeobecné jásání, až na pár výjimek. Někteří vyloženě nebyli rádi, že musí opouštět své pozice. Povětšinou to byli vědci, jeden takový pár vědátorů stál vzadu u

stojanu se zkumavkami.

„Tohle mě štve! Budu tu muset nechat celý svůj výzkum, jediné, co si můžu vzít je časomíra, ty dvě zkumavky a papír. Kdybych si já tupoun zapsal počáteční podmínky. Víím, kolik jsem tam dal clostridia, ale už si nepamatuju. . .“

„Tak si to dopočítej,“ navrhl mu druhý vědec. „Vždyť tohle ti ukazuje aktuální stav, tak to někde zastav a spočti to.“

27-IV-7

Na počátku bylo v první zkumavce pět buněk clostridia a několik buněk mycobacteria, v druhé zkumavce byl stejný počet buněk, ale všechny buňky byly mycobacterium. Za jednu minutu se každá buňka clostridia rozdělí na dvě, každá buňka mycobacteria na tři. V době, kdy Xandian zastavil přístroj bylo v první zkumavce 3 740 567 buněk a v druhé zkumavce 6 377 292 buněk. Kolik bylo v první zkumavce buněk mycobacteria? Předpokládejte, že počet minut, které uběhly, je přirozené číslo. Najděte všechna řešení a zdůvodněte, proč nejsou možná žádná další.

O pár minut později se dveře hangáru s hlasitým duněním otevřely a dovnitř unikly dva transportéry republiky. Byla to rychlá a bezchybná akce, nikdo neotálel a během chvilky už byli všichni na palubě republikového křižníku a sledovali zbytky hořící xandijské lodi. Admirál Ak'Atal se odvrátil od panoramatického výjevu venku ve vesmíru a promluvil na Xandiana Ast-Ore.

„Tak nakonec všechno dobře dopadlo.“

„Ne tak docela.“

„Když pomínu ten incident se zničením poloviny Xandijského námořnictva, samozřejmě.“

„Odpusťte si sarkasmus, admirále. Já nemluvíím o tomhle. Ještě není konec.“

„Cože?“

„Bitevní droidy jsme nevyráběli na lodi, pane. Pořád jich stovky, možná tisíce existují v našich tajných laboratořích. A co je horší – tyto laboratoře jsou řízeny stejným systémem jako ta hořící věc na obzoru. Možná, že všichni v laboratořích ještě nejsou mrtví, ale určitě se jim jen tak nepovedlo to tam vypnout. A nepovede se to ani nikomu jinému, to mi věřte. . .“

Termín odeslání 4. série – 20. května 2010

Vzorová řešení a komentáře ke druhé sérii

27-II-1

Zadání

Stíhač měří vzdálenost od povrchu sonickým vysílačem. Ten začne vysílat ve vzdálenosti 400 km od povrchu. Loď letí po celou dobu plynule rychlostí 1600 km/h směrem k povrchu. Sonické měření funguje až do doby, kdy stíhač dorazí na povrch. Vždy je vyslán signál – impuls, který letí k zemi rychlostí 3000 km/h, tam se odrazí a stejnou rychlostí se vrací zpět. Jakmile impuls dorazí zpět k lodi, je vyslán další impuls. Takto se impulsy vysílají a odrážejí po celou dobu letu k zemi. Jakou vzdálenost celkem všechny impulsy dohromady urazí?

Řešení

Rychlost lodi je 1600 km/h. Dráha, kterou loď po cestě k planetě uletí je 400 km. Odtud již jednoduše vypočítáme, že loď poletí čtvrtinu hodiny. Celková dráha impulsů je rovna součinu jejich rychlosti a času, po který letí. Tedy $3000 \cdot 0,25 = 750$. Impulsy celkem uletí 750 km.

Komentář

Úloha šla řešit více způsoby – ten autorský byl mnohem jednodušší a všichni, kteří se jím vydali, získali plný počet bodů. Druhá polovina řešitelů se rozhodla řešit úlohu metodou sčítání nekonečné řady, kde se sčítance velmi rychle zmenšují (autorem také nazývané metoda „čtvrcení vzdáleností“ – impulsy uletí vzdálenost loď-země za osm minut, loď se za osm minut posune o 213,3 kilometrů. . .) Samotné rozhodnutí vydat se tímto směrem bylo ohodnoceno odečtením jednoho bodu, další bod jsme ubírali, pokud jste došli k tomu, že paprsek uletí přibližně 750 km a ne přesně 750 km. Další body se strhávaly za jiné „drobné“ chyby.

27-II-2

Zadání

Seržant Andelko si nepamatuje přesné zapojení drátů u hlavního počítače, ale ví, že:

- Drátů je celkem sedm, každý má jinou barvu a byly zapojeny vedle sebe v řadě.
- Žlutý drát byl mezi fialovým a zeleným (ne nutně hned vedle).
- Modrý drát byl napravo od fialového (ne nutně hned vedle).
- Červený drát byl na třetí pozici zleva.

- Růžový drát nebyl úplně vlevo.
- Hnědý drát byl napravo od růžového (ne nutně hned vedle).
- Fialový drát byl zapojen hned vedle červeného.
- Na místě úplně vpravo nebyl zapojen hnědý drát.

Jak musí seržant Andelko zapojit dráty, aby hlavní počítač znovu fungoval správně (tj. jak byly dráty zapojeny)?

Řešení

Ze zadání víme, že na třetí pozici zleva je červený drát. Dále na první pozici zleva je zelený drát, protože tam nesmí být žlutý (je mezi dvěma jinými), fialový (je hned vedle červeného, který je až třetí), růžový (ze zadání není úplně vlevo), hnědý (je napravo od jiného drátu) ani modrý (je napravo od jiného). Dále na čtvrté pozici zleva je fialový. Je hned vedle červeného a kdyby byl na druhé pozici, nezbylo by místo pro žlutý drát. Z toho přímo plyne, že druhá pozice zleva patří žlutému drátu (je mezi fialovým a zeleným). Dále hnědý nemůže být úplně vpravo ani na páté pozici zleva (nezbylo by místo pro růžový drát), bude tedy na šesté pozici. Proto na páté pozici je růžový drát a na sedmé je tedy modrý. Nakonec ověříme, že jsou všechny podmínky splněny a máme konečné jediné řešení: zelený – žlutý – červený – fialový – růžový – hnědý – modrý.

Komentář

Tahle úloha byla buď nejzábavnější, nebo nejjednodušší, protože ji řešil největší počet řešitelů. Nejvíce z vás začínalo umístěním červeného a pak fialového, několik začalo červeným a zeleným. Pár lidí si v podstatě vypsal všechny možnosti a vyškrtávalo ty chybné. Všechna řešení byla správná, ačkoliv zdaleka ne všechna řešení byla ohodnocena plným počtem bodů. Hodně řešitelů uvedlo pouze pořadí drátů, ale už nezdůvodnilo, jak k němu došli. Dával jsem dva body za správné řešení, jeden bod za umístění červeného drátu, případně nějaký komentář k řešení, další dva body pak za podrobně popsané úvahy o zapojení. Nikdo z vás už nakonec nekontroloval, zda-li jsou všechny podmínky splněny, za to jsem však body nestrhával.

27-II-3

Zadání

Na elektronickém papíře v rukou poručíka byl napsán algebrogram:

IHNED
 POSLI

RESENI

neboli

IHNED + POSLI = RESENI

A pod tím krátká poznámka: $L = 7$. Zjistěte, čemu se rovnají ostatní písmena, pokud každé písmeno znamená jednu číslici, žádná dvě písmena nezastupují stejnou cifru a po dosazení je rovnost splněna.

Řešení

Ze zadání víme, že $L = 7$, navíc zřejmě platí $D = 0$ ($I + D = I$). Také je jasné, že $R = 1$, neboť součet dvou jednociferných čísel zvětšený o jedna (za předpokladu, že si při sčítání pod sebou držíme jedničku) se rovná nejvýše 18. Ze sloupců desítek a stovek můžeme vidět, že S se musí rovnat 3 (pro $E = 0, 1, 2$) nebo 2 (pro $E > 2$). Projdeme si nejdříve druhou možnost. Předpokládejme $S = 2$. Pokud $E = 3$, pak $N = 0$, což je spor s $D = 0$. Pro $E = 4$ se $N = 1$, což je spor s $R = 1$. Pro $E = 5$ se $N = 2$, což je spor s $S = 2$. Pro $E = 6$ a $N = 3$ získáme:

IH360
P027I
16263I

Zatím jsme nepoužili čísla 4, 5, 8, 9. Získáme, že $H + O = 12$ (dvěma se $H + O$ zjevně rovnat nemůže), což platí jen pro dvojici 4 + 8. Z toho tedy plyne, že $I + P + 1 = 9 + 5 + 1 = 15$, což je spor s tím, že $RE = 16$. Pro $E = 8$ a $E = 9$ nabývá hodnota RE větších hodnot, než je možné dosáhnout součtem dvou zbývajících cifer zvětšených o 1. Takto jsme tedy vyloučili všechny možnosti pro $S = 2$. Nyní předpokládejme $S = 3$. Tedy $E = 2$, neboť E se nemůže rovnat 0, 1. Tedy i $N = 9$. Po dosazení zatím známých číslic získáme:

IH920
P037I
12329I

Zatím nám zbývají číslice 4, 5, 6, 8. Vidíme, že $H + O + 1 = 13$, tedy $H = 8, O = 4$ nebo $H = 4, O = 8$ (přípustné jsou obě možnosti) a $I + P + 1 = 12$, tedy $I + P = 11$, což je přesně součet dvou zbývajících cifer 5 a 6, u kterých také s určitostí nedokážeme říci, která patří ke kterému písmenu. Celkem tedy získáváme čtyři řešení, která zapíšeme ve tvaru vzestupné posloupnosti, tedy 0123456789.

- DRESHIPLON
- DRESOIPLHN

- DRESHPILON
- DRESOPILHN

Komentář

Tato úloha byla hodnocena relativně přísně – plný počet bodů jste mohli získat jen pokud, jste si uvědomili, že není s určitostí jisté, že $E = 2$, ale že by teoreticky mohlo nabývat i hodnot vyšších. Pokud jste si to neuvědomili, strhl jsem Vám zpravidla jeden bod. Pokud jste měli v řešení jiné nesrovnalosti, kupříkladu jste uvedli jen jedno řešení, strhli jsem Vám bodů více. O to více mě pak překvapilo řešení Terezy Jirsové, které mě nadchlo natolik, že jsem se rozhodl poprvé v tomto ročníku ohodnotit některý příklad vyšším bodovým ziskem, než je jeho proklamované maximum.

27-II-4

Zadání

Heslo do počítače je tvořeno písmeny slova NavyTex. Tolinskiho dekodér bude postupně do počítače zadávat přesmyčky tohoto slova (tedy sedmipísmenná „slova“ tvořená těmito písmeny - každé jen jednou). Kolik může celkem dekodér vyzkoušet různých možností a kolikrát vyzkouší slovo NAVYTEX, víte-li, že slova zkouší postupně podle abecedy (tj. začíná slovem AENTVXY) a že dekodér zkusí pouze velká písmena.

Řešení

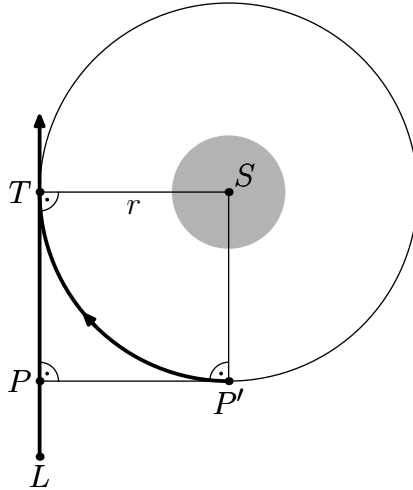
Na prvním místě máme 7 možností, jak si vybrat písmeno, na druhém 6 možností, na třetím pět, . . . , na sedmém již pouze jednu možnost — celkem tedy máme $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ možností (toto číslo můžeme také zapsat ve tvaru $7!$ – čteme 7 faktoriál; číslo $n!$ tedy znamená $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$), což se rovná 5040. Písmeno N je třetí v abecedě ze sedmi písmen slova NAVYTEX, je v abecedě určité řazeno až za $2 \cdot 6! = 1440$ slov, která začínají na A a E . A je první písmeno abecedy, V je v abecedním pořadí zbývajících písmen na třetím místě – jsou před ním všechna slova začínající na NAE a NAT , jichž je celkem $2 \cdot 4! = 48$ slov. Písmeno Y je ze čtyř zbývajících písmen poslední, před slovem NAVYTEX jsou tedy také všechna slova začínající na $NAVE$, $NAV T$, $NAV X$, jichž je celkem $3 \cdot 3! = 18$. Zbývají nám již jen písmena E , T , X . T je z nich abecedně druhé, slova začínající na NAVYE jsou pouze dvě. Písmeno E je v abecedě před X , před slovem NAVYTEX není tedy žádné další slovo. Celkem je tedy v abecedě před slovem NAVYTEX $1440 + 48 + 18 + 2 = 1508$ slov. Dekodér tedy vyzkouší slovo NAVYTEX jako 1509.

Komentář

Tato lehká úloha Vám většinou nedělala problémy, jen jste si místy přidali/ubrali jednu možnost, za což jsem většinou strhával jeden bod.

27-II-5

Zadání



Z bodu L vylétá naše loď konstantní (stálou) rychlostí 50 000 km/h po přímce, která je tečnou ke dráze, po které létá xandijská hlídková loď rychlostí 70 000 km/h okolo měsíce Centenus. Vzdálenost z místa startu L do místa dotyku obou drah T je 60 000 km. Po dvanácti minutách od vzletnutí je naše loď v bodě P a zároveň je nepřátelská loď v bodě P' a letí směrem k T .

- Bude nepřátelská loď v bodě T dříve či později než naše (tedy bude naše loď lapena?) a o kolik?
- příklad 5a) + jak musí nepřátelská loď pozměnit svou rychlost, chce-li být v bodě T zároveň s naší?

Řešení

- Víme, že naše loď zdolala vzdálenost LP za 12 minut rychlostí 50 000 km/h, tedy $|LP| = 0,2 \cdot 50000 = 10000$ km. Pak $|PT| = |LT| - |LP| = 60000 - 10000 = 50000$ km. Je zřejmé, že $PP'ST$ je čtverec, tedy poloměr kružnice představující oběžnou dráhu je taktéž 50 000 km. Srovnáme nyní časy obou lodí při cestě z bodů P, P' do bodu T : $t_1 = \frac{50000}{50000} = 1$ hod; $t_2 = \frac{2 \cdot 50000 \cdot \pi}{4 \cdot 70000} \doteq 1,12$ hod (dráhou je

čtvrtina obvodu kružnice). Závěr: naše loď bude v bodě T dříve než xandijská asi o 7,2 minuty, lapena tedy nebude.

b) Aby byla v bodě T zároveň s naší, musí xandijská loď zdolat čtvrt-kružnici za hodinu. Její rychlost tedy musí být $\frac{2 \cdot 50000 \cdot \pi}{4 \cdot 1} \doteq 78540$ km/h. Xandijská loď musí zvýšit svou rychlost asi o 8 540 km/h.

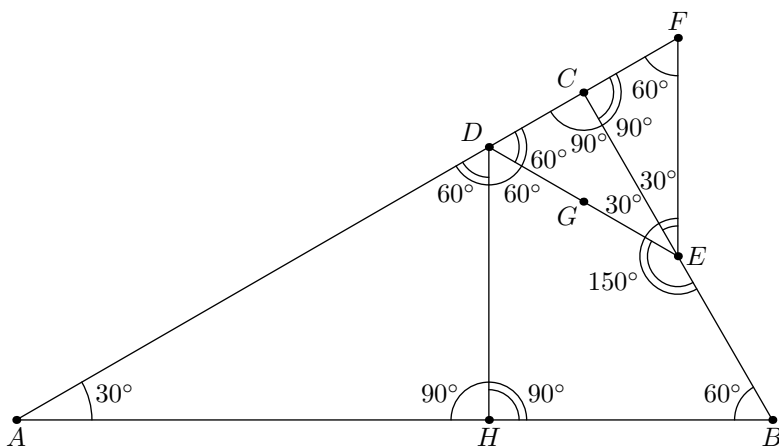
Komentář

Většině řešitelů tento příklad nedělal velké problémy. Body byly strhávány zřídka, hlavně za nedostačující komentář či numerické chyby ve výpočtech.

27-II-6

Zadání

Skenovaný povrch vypadal asi takto:



Navíc znáte následující údaje:

1. C je střed úsečky DF a G je střed úsečky DE .
2. Vzdálenost CG je polovinou délky DE .
3. Sinus trojnásobku úhlu CEF je 1.
4. Cosinus úhlu ABC je 0,5.

Pomozte Andelkovi spočítat

- a) velikosti všech úhlů v obrázku, pokud úhly ADH a ABC jsou shodné
b) délku strany CF , jestliže $|AC|=3$ m a E je středem strany BC

Řešení

- a) Ze zadání víme, že $|CG| = |DG| = |EG|$ a body C, D a E tedy leží na kružnici se středem G a průměrem $|DE|$. Pak je podle Thaletovy věty úhel DCE pravý. Nyní můžeme odvodit shodnost trojúhelníků CEF a CED podle věty *sus*, protože sdílí stranu CE , úhel ECF je po dopočtení do přímého úhlu také pravý a platí $|CD| = |CF|$. Protože úhel CEF nabývá hodnot z intervalu $(0, 90)$ a sinus jeho trojnásobku je roven jedné, je jediným řešením $3 \cdot |\sphericalangle CEF| = 90^\circ \implies |\sphericalangle CEF| = 30^\circ$. Úhel EFC pak dopočítáme jako $180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Díky shodnosti trojúhelníků jsme tedy zjistili i velikosti úhlů CDE a CED . Dále víme, že cosinus úhlů ABC a ADH je roven 0,5, což může na daném intervalu nastat pouze pro $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADH| = 60^\circ$. Dopočítáním úhlů v trojúhelnících pak získáme $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$ a $|\sphericalangle AHD| = 90^\circ$. Dále dopočítáním do přímých úhlů získáme i $|\sphericalangle DHB| = 90^\circ$, $|\sphericalangle DEB| = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ a $|\sphericalangle HDE| = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$. Tím jsme hotovi.

- b) Trik spočívá pouze ve využití goniometrických funkcí. Velikost strany BC můžeme spočítat jako $|BC| = \operatorname{tg}(|\sphericalangle BAC|) \cdot |AC| = \sqrt{3}$ m. Potom $|CE| = \frac{|BC|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m. Stejně tak $|FC| = \operatorname{tg}(|\sphericalangle CEF|) \cdot |CE| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ m.

Komentář

Úloha dopadla celkem dobře, i když z osmi došlých řešení se na plný počet dostala pouze čtyři. Body byly strhávány především za závažná nezdůvodnění, například za chybějící důkaz rovnostrannosti trojúhelníku DGC , která ze zadání nevyplývá (lze dokázat třeba přes střední příčku). Trigonometrické výpočty byly vesměs správné, jen někteří průběžně zaokrouhlovali a tak jim výsledek nevyšel přesně.

27-II-7

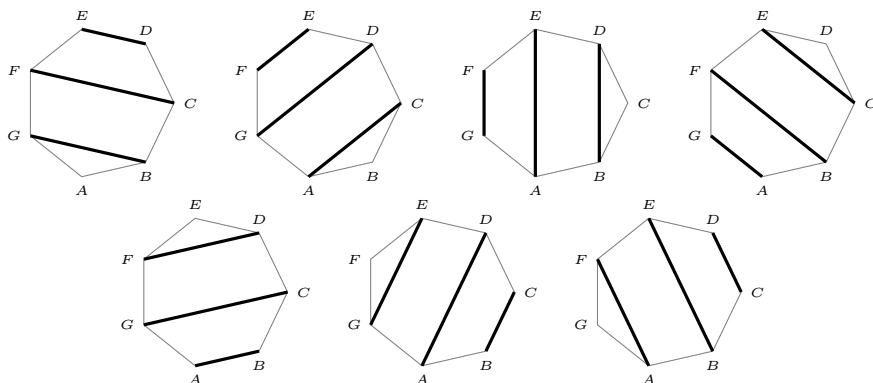
Zadání

Napájení vrtných systémů je tvořeno n energetickými články poskládanými do pravidelného n -úhelníku. Články se nabíjejí vždy po dvou tak, že mezi sebou vytvoří energetický paprsek a předávají si energii po dobu pěti minut. Aby byl článek plně nabitý, musí být nabit každým ze zbývajících článků. Je možné, aby se nabíjelo více

dvojic zároveň, ale paprsky se nesmějí křížit. Jak dlouho nejméně bude trvat než se nabije všech sedm článků? Jak dlouho by to trvalo, kdyby jich bylo jen šest?

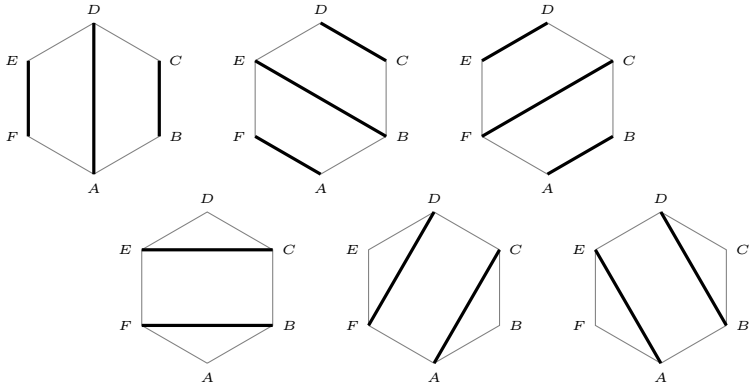
Řešení

- a) Protože článků je lichý počet, musí alespoň jeden z nich zůstat v každé fázi nabíjení nevyužit. V každé fázi tedy můžeme nabít nejvýše tři dvojice článků. Jelikož je celkem potřeba nabít $7 \cdot 62 = 21$ článků, minimální počet potřebných fází bude 7. Nyní na obrázcích ukážeme jeden z možných postupů, jak články nabít za sedm fází:



Nejrychleji to tedy jde za $7 \cdot 5 = 35$ minut.

- b) Tentokrát je článků sudý počet, ovšem je třeba si uvědomit, že když se budou nabíjet dva články, mezi nimiž je na obvodu třetí (což určitě nastane alespoň jednou), musí ten třetí zůstat nevyužit, protože by se paprsky křížily. Potom ale musí být nejmenší celkový počet fází 6, protože daný článek bude alespoň jednou nevyužit a s ostatními pěti se může nabít nejméně za pět fází. Nyní na obrázcích ukážeme jeden z možných postupů, jak články nabít za šest fází:



Nejrychleji to tedy jde za $6 \cdot 5 = 30$ minut.

Komentář

Tato úloha byla, pokud jste došli ke správnému výsledku, hodnocena velice mírně, neboť jste většinou neuvedli, proč je to Vámi zvolené řešení to správné. V podstatě jediné řešení, které si zasloužilo plný počet bodů napsala Tereza Jirsová, nakonec jsme však udělili sedm bodů i těm lepším řešením, která si spíše zasloužila bodů šest. Pokud jste nepřišli na správné řešení, tak jste byli po zásluze ohodnoceni pouhými dvěma body.

Výsledková listina 2. série

Jméno	Škola	Třída	1	2	3	4	5	6	7	Suma
Jan Šorm	Jaroška	2.ag	5	5	4	5	5	5	7	36
Tereza Jirsová	AG Praha	4.A	1	5	6	5	5	4	7	33
Ang Le Hoang	Jaroška	2.ag	3	5	4	4	5	5	7	33
Prokop Šilhavý	AG Praha	4.A	5	5	5	4	2	5	6	32
Nella Fedorowyczová	Jaroška	4.ag	5	5	5	5	5	5	2	32
Jan Ševeček	Jaroška	2.ag	5	3	3	5	3	3	6	28
Jana Hévrová	AG Praha	4.A	3	5	2	4	5	3	6	28
Anna Daňhelová	AG Praha	4.A	-	5	5	2	-	-	-	12
Anna Ryantová	AG Praha	4.A	-	5	5	-	-	-	-	10
Jakub Šárka	AG Praha	4. A	0	5	1	-	2	0	2	10
Veronika Paráková	Jaroška	2.bg	-	3	-	4	-	-	-	7
Matěj Jirsa	AG Praha	2.A	-	3	-	-	-	-	-	3
Filip Lamparter	Jaroška	2.ag	-	2	-	-	-	-	-	2

Výsledková listina po 2. sérii

Jméno	Škola	Třída	1. s	2. s	3. s	4. s	Suma
Jan Šorm	Jaroška	2.ag	35	36			71
Ahn Le Hoang	Jaroška	2.ag	35	33			68
Tereza Jirsová	AG Praha	4.A	30	33			63
Prokop Šilhavý	AG Praha	4.A	27	32			59
Jan Ševeček	Jaroška	2.ag	30	28			58
Nella Fedorowyczová	Jaroška	4.ag	25	32			57
Jana Hévrová	AG Praha	4.A	23	28			51
Jakub Šárka	AG Praha	4.A	26	10			36
Kateřina Vaňková	ZŠ Křídlovická	7.C	33	-			33
Eva Klimentová	Jaroška	1.ag	32	-			32
Anna Daňhelová	AG Praha	4.A	18	12			30
Dan Plaček	Jaroška	1.bg	28	-			28
Andrea Grossová	AG Praha	2.B	25	-			25
Tran Anh Minh	Jaroška	2.ag	23	-			23
Tomáš Kalvoda	Jaroška	1.ag	23	-			23
Anna Ryantová	AG Praha	4.A	10	10			20
Filip Lamparter	Jaroška	2.ag	16	2			18
Matěj Jirsa	AG Praha	2.A	14	3			17
Vojtěch Malík	Jaroška	1.bg	13	-			13
Lukáš Michálek	Jaroška	1.ag	13	-			13
Veronika Valouchová	Jaroška	1.ag	12	-			12
Iva Bečková	GTN	2.B	12	-			12
Veronika Paráková	Jaroška	2.bg	5	7			12
Ondřej Borýsek	Jaroška	1.ag	10	-			10
Štěpán Touma	AG Praha	2.A	9	-			9
Do Tom	ZŠ Gajdošova	7.B	9	-			9
Ondřej Daňhel	AG Praha	2.B	8	-			8
Ota Novotný	AG Praha	2.B	7	-			7
Matouš Perla	AG Praha	2.B	5	-			5
Eva Dočekalová			5	-			5
Barbora Čistecská	AG Praha	2.A	5	-			5
Martin Rejda	ZŠ Gajdošova	7.A	3	-			3
Eduard Eck	AG Praha	2.A	3	-			3
Bronislav Němeček	ZŠ Gajdošova	7.A	2	-			2

